OPCIÓN A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 2 de 1998.

Una compañía aérea ofrece vuelos para grupos de estudiantes con las siguientes condiciones: Para organizar un vuelo, el número mínimo de pasajeros debe ser de 80, los cuales pagarían 210 euros cada uno. Sin embargo, esta tarifa se reduce en 1 euro por cada pasajero que exceda el número de 80. Suponiendo que la capacidad de cada avión es de 105 pasajeros y que el coste para la compañía es de 100 euros por plaza ocupada. ¿qué números de pasajeros ofrecen el máximo y, respectivamente, el mínimo beneficio para la compañía?

Solución

La función a maximizar es Beneficio = B = $(80 + x)(210 – x) – 100 (80 + x)$
$B = 8800 + 30x – x^2$
$B' = 30 – 2x$; $B' = 0$, nos da $x = 15$
Veamos que es un máximo pus $B'' = -2 < 0$
El número optimo de pasajeros es $80 + 15 = 95$
El beneficio máximo es $B(15) = 9025$
Para ver el beneficio mínimo sustituimos en los extremos del posible intervalo que son $x = 0$ y $x = 25$
$B(0) = 8800$
$B(25) = 8925$,por tanto el mínimo beneficio se obtiene con $x = 0$ es decir con 80 pasajeros

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 2 de 1998.

Se sabe que la función $f : \Re \to \Re$ dada por: $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si} \quad x<1 \\ cx & \text{si} \quad 1\le x \end{cases}$, es derivable en todo su dominio y que en los puntos $x = 0$ y $x = 4$ toma el mismo valor.
(a) Halla a, b y c..
(b) Calcula $\int_0^2 f(x)dx$

Solución

(a)
Como la función es derivable en todo su dominio, también lo es en $x = 1$, y además es continua en $x = 1$.
Nos dan además que $f(0) = f(4)$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si} \quad x<1 \\ cx & \text{si} \quad 1\le x \end{cases};\quad f'(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{si} \quad x<1 \\ c & \text{si} \quad 1\le x \end{cases}$$

Como existe $f'(1)$, tenemos que $f'(1^+) = f'(1^-)$
$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1} (c) = c$
$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1} (2x + a) = 2 + a$
Como $f'(1^+) = f'(1^-)$, tenemos que
$c = 2 + a$
Como es continua en $x = 1$
$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f (x) = \lim_{x\to 1^-} f (x)$
$\lim_{x\to 1^-} f (x) = \lim_{x\to 1} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b$
$\lim_{x\to 1^+} f (x) = \lim_{x\to 1} (cx) = c$
Como los límites son iguales tenemos
$c = 1 + a + b$
De $f (0) = f (4)$, tenemos $f(0) = b = 4c = f(4)$
Resolviendo este sistema
$c = 2 + a$
$c = 1 + a + b$
$b = 4c$
Obtenemos $a = -7/4$, $b = 1$ y $c = 1/4$
Con lo cual la función dada es

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si} \quad x<1 \\ cx & \text{si} \quad 1\le x \end{cases} = \begin{cases} x^2-\dfrac{7x}{4}+1 & \text{si} \quad x<1 \\ \dfrac{x}{4} & \text{si} \quad 1\le x \end{cases}$$

(b)

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2-\frac{7x}{4}+1\right)dx+\int_1^2\frac{1}{4}xdx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{7x^2}{8}+x\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{8}\right]_1^2 = 1/3 – 7/8 +1 + (1/2 – 1/8) = 5/6$$

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 2 de 1998.

(a) Los tres planos cuyas ecuaciones son, respectivamente, $\begin{cases} x+2y+az=1 \\ 2x+y+az=0 \\ 3x+3y-2z=1 \end{cases}$, se cortan en una recta.¿Cuanto vale a?

(b) Determina el simétrico del punto P=(1,0,1) respecto de la recta determinada en el apartado anterior.

Solución

(a)

Para que los tres plano s siguientes se corten en una recta $\begin{cases} x+2y+az=1 \\ 2x+y+az=0 \\ 3x+3y-2z=1 \end{cases}$

el rango(A) = rango(A^*) = 2, por tanto tiene que ser creo el determinante de la matriz de los coeficientes

$$0=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & a \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & a \\ 3 & -2 \end{vmatrix} -2.\begin{vmatrix} 2 & a \\ 3 & -2 \end{vmatrix} +a.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6a - 6 = 0, \text{ de donde } a = 1$$

Por tanto la recta pedida es $r \equiv \begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$

(b)

Para hallar el simétrico del punto P ponemos la recta r en vectorial, para lo cual sea $z = \lambda$,

$x + 2y = 1 - \lambda$

$2x + y = \lambda$

Operando obtenemos $(x,y,z) = (-1/3 + 1/3\lambda, 2/3 + 1/3\lambda, \lambda)$, con lo cual un vector director sería **v** = (1,1,3)

Calculamos el plano Π que pasa por P(1,0,1) y corta perpendicularmente a la recta r, por tanto su vector normal **n** = **v** = (1,1,3)

$\Pi \equiv 1.(x-1) + 1.(y-0) +3.(z-1) = x + y + 3z - 4 = 0$

Sea Q el punto de corte de la recta r con el plano Π

$(-1/3 + 1/3\lambda) + (2/3 + 1/3\lambda) + 3 \lambda - 4 = 0$, operando obtenemos $\lambda = 11/12$, con lo cual el punto Q es

Q(-1/3 + 1/3(11/12), 2/3 + 1/3(11/12),11/12) = (- 1/36, 35/36, 33/36)

El simétrico del punto P respecto de la recta r, es el simétrico del punto P respecto del punto Q, luego el punto Q es el punto medio del segmento PP ‘, siendo P ‘ el punto buscado

(- 1/36, 35/36, 33/36) = [(1+x)/2, (0+y)/2, (1+z)/2], de donde obtenemos

P ‘(x,y,z) = (- 38/36, 70/36, 30/36)

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 2 de 1998.

Puedes construir una matriz cuadrada y de orden tres que verifique las condiciones (i) y (ii) escritas a continuación?

(I) Su traspuesta y su inversa coinciden.

(ii) Su terminante vale 5

Razona la respuesta.

Solución

Matriz A, $A^t = A^{-1}$, y det(A) = 5

Si $A^t = A^{-1}$, la matriz A es ortogonal

Además de la expresión anterior obtenemos $A^t.A = I$, y como det(A) = det(A^t), cono lo cual

det(A^t.A) = det (I) = det(A.A) = det(A). det(A) = $[\det(A)]^2$ = det(I) = 1, de donde

det(A) = $\pm$ 1, y no puede ser 5.

OPCIÓN B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 2 de 1998.

Sea $f : R \rightarrow R$ la función definida por $f(x) = x^2 + \sqrt{2}\, x + 1/4$.

(a) Dibuja el recinto limitado por la gráfica de la función f y sus tangentes en los puntos de abcisas x = 1/2 y x = - 1/2.

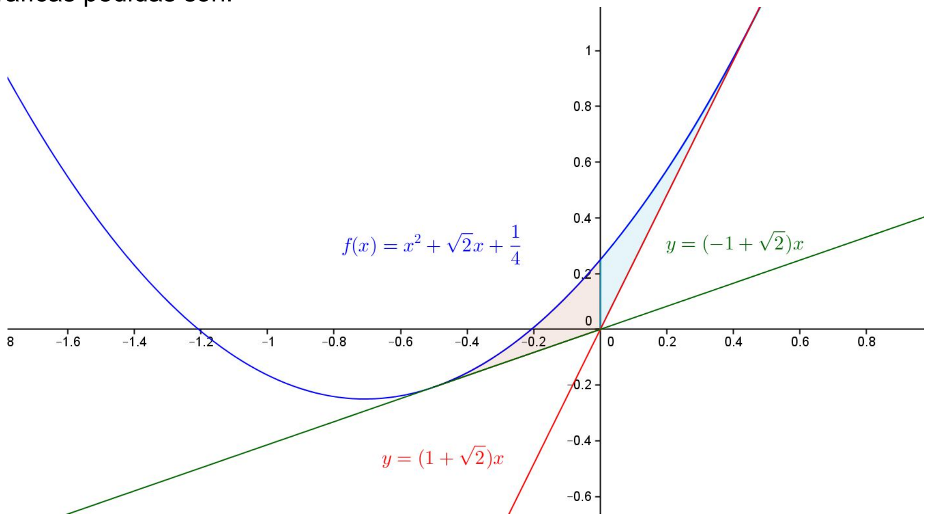
(b) Prueba que el eje de ordenadas divide el recinto anterior en dos que tienen igual área

Solución

La función $f(x) = x^2 + \sqrt{2}\, x + ¼$. , es una parábola con vértice en $V(-\sqrt{2}/2, - 1/4)$

$f'(x) = 2x + \sqrt{2}$

La recta tangente en x = a es y – f(a) = f ‘(a).(x – a), por tanto
La recta tangente en x = ½ es $y - [(1+\sqrt{2})/2] = (1+\sqrt{2}).(x - ½)$, simplificando queda $y = (1+\sqrt{2})x$
La recta tangente en x = - ½ es $y - [(1-\sqrt{2})/2] = (-1+\sqrt{2}).(x + ½)$, simplificando queda $y = (-1+\sqrt{2})x$
Por tanto las gráficas pedidas son:



(b)
Para ver que el eje de ordenadas divide el recinto anterior en dos que tienen igual área, tenemos que ver que las integrales siguientes son iguales:

$$\int_{-1/2}^{0}\left[(x^2+\sqrt{2}x+1/4)-(-1+\sqrt{2})\right]dx = \int_{0}^{1/2}\left[(x^2+\sqrt{2}x+1/4)-(1+\sqrt{2})\right]dx=$$

Pero $\int_{-1/2}^{0}\left[(x^2+\sqrt{2}x+1/4)-(-1+\sqrt{2})\right]dx= \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}x\right]_{-1/2}^{0} =1/24$

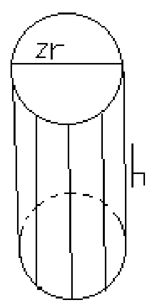
Además $\int_{0}^{1/2}\left[(x^2+\sqrt{2}x+1/4)-(1+\sqrt{2})\right]dx= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}x\right]_{0}^{1/2} =1/24$

Luego las dos regiones tienen igual área.

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 2 de 1998.

Se quiere construir un envase cerrado con forma de cilindro cuya área total (incluyendo las tapas) sea 900 cm^2. ¿Cuales deben ser el radio de la base y la altura para que el volumen del envase sea lo más grande posible? ¿Cuánto vale ese volumen máximo?.

Solución



El área total es $900 = 2\pi r^2 + h.2\pi r$, de donde $h = (400 - \pi r^2)/\pi r$
La función o optimizar es $V = \pi r^2.h = (400r - \pi r^3)$
$V' = (400 - 3\pi r^2)$; $V' = 0$ nos da $r^2 = 400/3\pi$, de donde $r = 20 / \sqrt{3\pi}$.
Sustituyendo en $h = (400 - \pi r^2)/2\pi r$, obtenemos también $h = 2.\ 20 / \sqrt{3\pi}$. es decir tiene igual altura que el diámetro.
Veamos que es un máximo $V'' = -3\pi r < 0$, luego es máximo

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 2 de 1998.

(a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $B = (\,3 \ \ 1 \ \ -1)$, calcula la matriz X que cumple $X+(AB)^t=\begin{pmatrix} 7 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(El superíndice t representa la matriz traspuesta)

(b) ¿Tiene X matriz inversa? Justifica la respuesta.

Solución

(a)

$$X=\begin{pmatrix} 7 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}-(AB)^t=\begin{pmatrix} 7 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} 7 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

Como $|X|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$, la matriz X no tiene inversa.

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 2 de 1998.

Calcula dos vectores **u** = (1 , u_2 , u_3) y **v** = (v_1 , v_2 , 0) de R^3 que formen un ángulo de 45º y cuyo producto vectorial sea el vector **w** = (1 , 1 , 0).

Solución

u = (1 , u_2 , u_3) = (1, a, b) por comodidad.

Análogamente **v** = (v_1 , v_2 , 0) = (c, d, 0)

$$\cos(45º) = \frac{u \bullet v}{|u||v|} = \frac{c + ad}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & a & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix} =$ **i**(-bd) – **j**(-bc) + **k**(d – bc) = (-bd, -bc, d – ac) = (1, 1, 0), de donde:

-bd = 1. Suponiendo b $\neq$ 0, d = -1/b

-bc = 1. Suponiendo b $\neq$ 0, c = -1/b; por tanto c = d.

d – ac = 0. Teniendo en cuenta lo anterior c – ac = 0 = c·(1 - a) = 0, de donde **a = 1** porque c $\neq$ 0.

De $\dfrac{c + 1\cdot c}{\sqrt{1 + 1^2 + b^2}\sqrt{c^2 + c^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2c}{\sqrt{1 + 1^2 + b^2}\cdot c\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2 + b^2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Multiplicando en cruz tenemos

$4 = 2\sqrt{2 + b^2} \rightarrow 2 = \sqrt{2 + b^2}$. Elevando al cuadrado 4 = 2 + b^2, de donde $b = \pm\sqrt{2}$.

Luego los vectores pedidos son:

Si $b = +\sqrt{2}$, $\mathbf{u_1}$ = (1, a, b) = (1, 1, $\sqrt{2}$) y $\mathbf{v_1}$ = (c, d, 0) = (c, c, 0) = $\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}, \dfrac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Si $b = -\sqrt{2}$, $\mathbf{u_2}$ = (1, a, b) = (1, 1, $-\sqrt{2}$) y $\mathbf{v_2}$ = (c, d, 0) = (c, c, 0) = $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$